

# Algoritmi e Strutture Dati

## Algoritmi di Ordinamento

Maria Rita Di Berardini, Emanuela Merelli<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Dipartimento di Matematica e Informatica  
Università di Camerino

13 novembre 2008

# Il problema dell'ordinamento

Il problema dell'ordinamento di un insieme è un problema classico dell'informatica

Ha una indiscutibile valenza in ambito applicativo: spesso si ritrova all'interno di problemi ben più complicati

È anche un utile strumento didattico: il problema in se è molto semplice e chiunque è in grado di comprenderne i termini essenziali

Per la sua risoluzione sono stati proposti numerosi algoritmi molto eleganti che consentono di evidenziare gli aspetti fondamentali della progettazione e della costruzione di un algoritmo efficiente

## Il problema dell'ordinamento

Dato un insieme di  $n$  numeri  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , trovare un'opportuna permutazione  $\{a'_1, a'_2, \dots, a'_n\}$  tale che  $a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$

**Input:**  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

**Output:**  $\{a'_1, a'_2, \dots, a'_n\}$  oppure

$\{a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, \dots, a_{\pi(n)}\}$

dove  $\pi$  è un'opportuna permutazione degli indici  $1, \dots, n$

# Il problema dell'ordinamento

Più in generale, sia  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  un insieme di  $n$  elementi qualsiasi su cui è definita una **relazione d'ordine totale** (ossia una relazione riflessiva, antisimmetrica e transitiva che chiamiamo  $\leq$ ), trovare una opportuna permutazione  $\{a'_1, a'_2, \dots, a'_n\}$  tale che

$$a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$$

Il problema dell'ordinamento ammette una soluzione unica a meno di elementi uguali; se  $A = \{a_1 = 7, a_2 = 3, a_3 = 13, a_4 = 7\}$ , allora abbiamo due soluzioni distinte ma equivalenti  $\{a_2, a_1, a_4, a_3\}$  e  $\{a_2, a_4, a_1, a_3\}$

## Complessità dei principali algoritmi di ordinamento

Algoritmo	Caso migliore	Caso medio	Caso peggiore
<b>SelectionSort</b>	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$
<b>InsertionSort</b> ✓	$O(n)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$
<b>BubbleSort</b>	$O(n)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$
<b>MergeSort</b>	$O(n \log_2 n)$	$O(n \log_2 n)$	$O(n \log_2 n)$
<b>QuickSort</b>	$O(n \log_2 n)$	$O(n \log_2 n)$	$O(n^2)$
<b>HeapSort</b> ✓	$O(n \log_2 n)$	$O(n \log_2 n)$	$O(n \log_2 n)$

# Il problema dell'ordinamento

Esamineremo i principali algoritmi che operano **esclusivamente mediante confronti**: l'InsertionSort, il SelectionSort, il BubbleSort, il QuickSort, il MergeSort e lo HeapSort

I primi tre algoritmi – **SelectionSort**, **InsertionSort** e **BubbleSort** – sono estremamente semplici; il prezzo da pagare alla semplicità di questi algoritmi è la complessità computazionale –  $O(n^2)$  anche nel caso medio (complessità espressa in termini del numero di confronti)

L'algoritmo **QuickSort** ci consente di raggiungere una complessità di  $O(n \log_2 n)$  solo nel caso medio, mentre nel caso peggiore ha una complessità di  $O(n^2)$

## Il problema dell'ordinamento

Lo **HeapSort** e il **MergeSort** hanno una complessità, anche nel caso peggiore, pari a  $O(n \log_2 n)$

Il limite inferiore alla complessità del **problema dell'ordinamento** se risolto esclusivamente mediante confronti (e quindi senza informazioni aggiuntive sull'insieme da ordinare) è proprio  $n \log_2 n$

Possiamo quindi concludere che gli algoritmi **HeapSort** e **MergeSort** sono **ottimali**

Esistono delle soluzioni meno generali ma più efficienti che si basano su assunzioni aggiuntive come ad esempio la presenza di elementi duplicati, il valore massimo e minimo all'interno dell'insieme o altre informazioni che consentono di introdurre delle ottimizzazioni (CountingSort, BucketSort)

# Selection sort

È un algoritmo molto intuitivo ed estremamente semplice

Nella pratica è utile quando l'insieme da ordinare è abbastanza piccolo e dunque può essere utilizzato anche un algoritmo non molto efficiente con il vantaggio di non rendere troppo sofisticata la codifica del programma che lo implementa

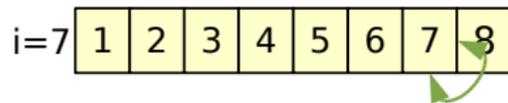
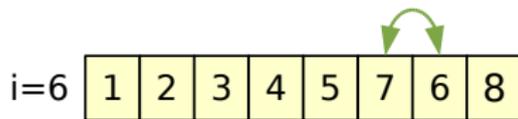
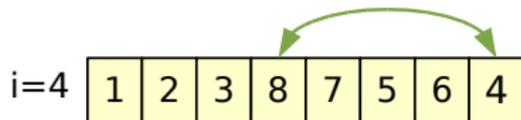
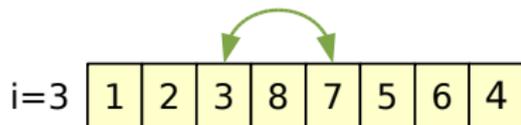
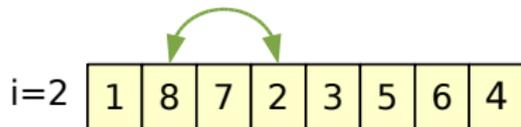
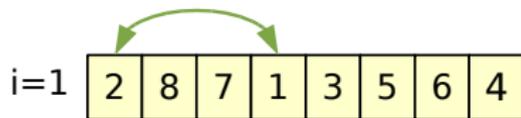
**Idea:** ripetere  $n - 1$  volte una procedura in grado di selezionare, durante la  $i$ -esima iterazione, l' $i$ -esimo elemento più piccolo dell'insieme e scambiarlo con quello che di trova in posizione  $i$

# SelectionSort( $A$ )

## SelectionSort( $A$ )

1.     **for**  $i \leftarrow 1$  to  $length[A] - 1$
2.         **do**  $min \leftarrow i$
3.             **for**  $j \leftarrow i + 1$  to  $length[A]$
4.                 **do if**  $A[j] < A[min]$  **then**  $min \leftarrow j$
5.             scambia  $A[min] \leftrightarrow A[i]$

# SelectionSort(A) – un esempio



# SelectionSort(A)

Dal punto di vista delle operazioni svolte, non esiste un caso particolarmente favorevole, o al contrario, particolarmente sfavorevole: l'algoritmo esegue lo stesso numero di operazioni qualunque sia la configurazione iniziale dell'array  $A$

Ad ogni iterazione del ciclo più esterno, il ciclo più interno (riga 4) esegue esattamente  $n - i$  confronti. Il numero totale di confronti è :

$$\sum_{i=1}^{n-1} n - i = \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$$

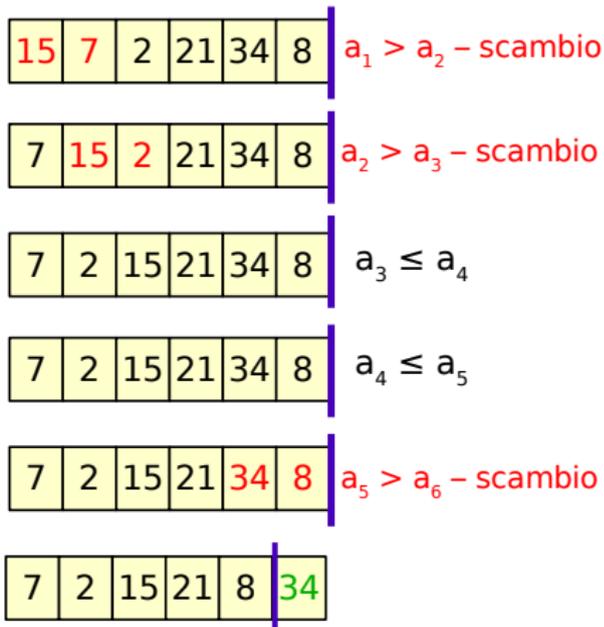
# BubbleSort

**Idea:** far risalire gli elementi più grandi nelle posizioni di indice più alto e – nel contempo – far ridiscendere gli elementi più piccoli verso le posizioni di indice più basso

**Strategia:** scorrere più volte la sequenza in input confrontando, ad ogni passo, l'ordinamento reciproco di elementi contigui e scambiando le posizioni di eventuali coppie non ordinate

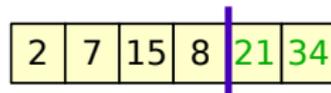
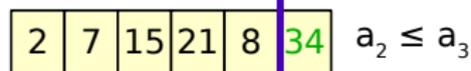
# BubbleSort

Dopo la prima scansione l'elemento più grande (34) è nella posizione corretta (l'ultima); le scansioni successive potranno non considerare l'ultima posizione



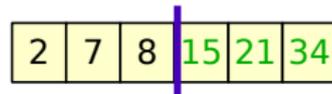
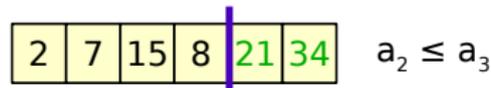
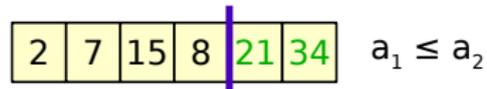
# Bubble sort

Al termine della seconda iterazione il secondo elemento più grande (21) si trova nella posizione corretta (la penultima); le scansioni successive potranno non considerare la penultima posizione – di nuovo aggiorniamo il limite



# BubbleSort

Il vettore è ordinato; una (eventuale) scansione successiva non effettuerebbe alcun scambio



## BubbleSort(A) – prima versione

### BubbleSort(A)

1.       **for**  $j \leftarrow \text{length}[A]$  downto 2   ▷  $j$  è il limite
2.             **for**  $i \leftarrow 1$  to  $j - 1$
3.                 **do if**  $A[i] > A[i + 1]$
4.                     **then** scambia  $A[i] \leftrightarrow A[i + 1]$

Questa prima versione di **BubbleSort** è corretta ma, il numero di confronti eseguiti dall'algoritmo è lo stesso per ogni possibile configurazione dell'input

## Analisi di BubbleSort(A) – prima versione

**Caso migliore** (vettore ordinato in maniera crescente): per ogni  $j = n, \dots, 2$ , il ciclo più interno (riga 4) esegue esattamente  $j - 1$  confronti e 0 scambi. Il numero totale di scambi è 0; il numero totale di confronti è:

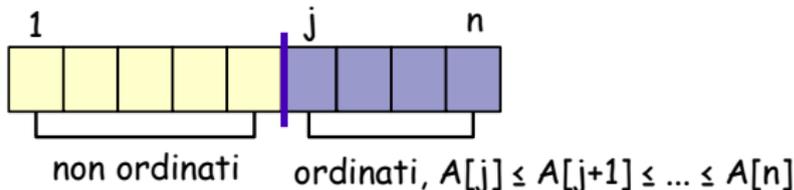
$$\sum_{j=2}^n j - 1 = \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$$

**Caso peggiore** (vettore ordinato in maniera decrescente): per ogni  $j = n, \dots, 2$ , il ciclo più interno (riga 4) esegue  $j - 1$  confronti e  $j - 1$  scambi. Il numero totale di confronti (e di scambi) è:

$$\sum_{j=2}^n j - 1 = \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$$

# Bubble sort

Esaminiamo lo stato del vettore durante un generica iterazione del ciclo più esterno (riga 2). Fissiamo  $j$  abbiamo che:



Assumiamo ora che durante l'esecuzione del ciclo più interno (riga 4) non viene effettuato alcuno scambio, e quindi che  $A[1] \leq A[2] \leq \dots \leq A[j-1] \leq A[j]$ . Allora il vettore è già ordinato

Possiamo usare questa informazione per (provare a) ridurre il numero di confronti necessari per ordinare il vettore

# BubbleSort(A)

## BubbleSort(A)

1.       **for**  $j \leftarrow \text{length}[A]$  downto 2   ▷  $j$  è il limite
2.              $\text{scambi} \leftarrow 0$
3.             **for**  $i \leftarrow 1$  to  $j - 1$
4.                 **do if**  $A[i] > A[i + 1]$
5.                     **then** scambia  $A[i] \leftrightarrow A[i + 1]$
6.                          $\text{scambi} \leftrightarrow \text{scambi} + 1$
7.             **if**  $\text{scambi} = 0$  **then return**

Questa nuova versione si comporta meglio della precedente **solo** nel caso migliore

# Analisi di BubbleSort(A)

**Caso migliore:** durante la prima (ed unica) iterazione del ciclo più interno, vengono eseguiti  $n - 1$  confronti e 0 scambi (questo causa la terminazione dell'algoritmo). Il numero totale di scambi è di nuovo 0; il numero totale di confronti è:

$$n - 1 = O(n)$$

**Caso peggiore:** fissato  $j = n, \dots, 2$ , il ciclo più interno (riga 4) esegue  $j - 1$  confronti e  $j - 1$  scambi. Ogni iterazione del ciclo più interno esegue almeno uno scambio e, quindi, il numero totale di confronti (e di scambi) è (esattamente come nell'altro caso):

$$\sum_{j=2}^n j - 1 = \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$$

## Analisi di BubbleSort(A)

L'analisi nel **caso medio** del bubblesort è abbastanza complessa; si basa sul numero di **inversioni** presenti nel vettore, dove il numero di inversioni di un dato vettore  $A$  è definito come:

$$\text{inv}(A) = |\{i = 1, \dots, n - 1 \mid a_i > a_{i+1}\}|$$

e definisce il numero di elementi del vettore “fuori posto”. Applicando un'analisi del tutto simile a quella vista per l'**InsertionSort** dà un numero di scambi nel caso medio pari a

$$\frac{n(n-1)}{4} = O(n^2)$$

Un'analisi alquanto più complessa (per la quale rinviamo a Knuth) dà un valore

$$\frac{1}{2}n^2 - n \log_2 n + o(n) = O(n^2)$$

per il numero di confronti nel caso medio

# Progettazione di Algoritmi

**Approccio incrementale:** assumo la porzione  $A[1..j - 1]$  del vettore ordinata ed inserisco il successivo elemento  $A[j]$  nella giusta posizione

**Approccio divide-et-impera:** divido il problema in input in  $k$  sottoproblemi e opero **ricorsivamente** sui  $k$  sottoproblemi (la cui dimensione è approssimativamente  $n/k$ )

**Concetto di ricorsione:** un algoritmo si dice ricorsivo se al suo interno (tra i suoi comandi) sono presenti chiamate a se stesso per gestire sottoproblemi analoghi a quello dato

# Divide-et-Impera

L'approccio seguito da questa tipologia di algoritmi consiste nel suddividere il problema in input in un certo numero di sottoproblemi simili a quello di partenza ma di dimensione inferiore

Una volta risolti ricorsivamente i sottoproblemi, combinano le soluzioni trovate per creare la soluzione al problema dato

Distinguiamo tre fasi principali: **Divide**, **Impera** e **Combina**

Un esempio classico di algoritmo che si basa su un approccio divide-et-impera è un algoritmo di ordinamento noto come merge-sort

# Algoritmo di ordinamento MergeSort

Le tre fasi possono essere così descritte

- **Divide:** gli  $n$  elementi della sequenza da ordinare vengono in due sottosequenze (approssimativamente) di  $n/2$  elementi ciascuna
- **Impera:** ordina, usando ricorsivamente il merge sort, le due sottosequenze
- **Combina:** fonde le due sottosequenze per produrre come risposta la sequenza ordinata

# Algoritmo di ordinamento MergeSort

Il processo di suddivisione si ferma quando la sequenza da ordinare ha lunghezza 1

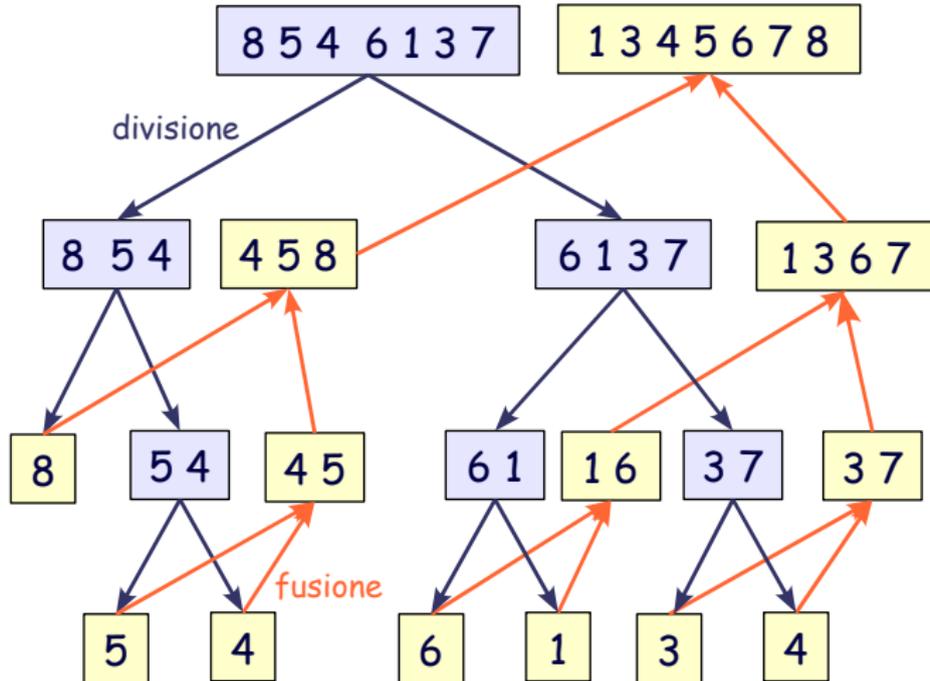
Il passo **combina** fonde le due sequenze utilizzando una procedura ausiliaria di fusione **merge**( $A, p, q, r$ ), dove:  $A$  è un array e  $p, q, r$  sono indici di elementi dell'array tali che  $p < q < r$

**merge**( $A, p, q, r$ ) assume che  $A[p, \dots, q]$  e  $A[q + 1, \dots, r]$  siano ordinati e genera  $A[p, \dots, r]$  ordinato

# Algoritmo di ordinamento MergeSort

```
MergeSort(A, left, right)  
  if left < right  
    then mid =  $\lfloor (left + right)/2 \rfloor$   
          MergeSort(A, left, mid)  
          MergeSort(A, mid + 1, right)  
          Merge(A, left, mid, right)
```

$A = \{8, 5, 4, 6, 1, 3, 7\}$



# Fusione di due sottosequenze ordinate

**Merge**( $A$ ,  $left$ ,  $mid$ ,  $right$ )

$m_1 \leftarrow mid - left + 1$   $\triangleright$  dim di  $A[left, \dots, mid]$

$m_2 \leftarrow right - mid$   $\triangleright$  dim di  $A[mid + 1, \dots, right]$

$B[1, \dots, m_1] \leftarrow A[left, \dots, mid]$

$C[1, \dots, m_2] \leftarrow A[mid + 1, \dots, right]$

$i, j \leftarrow 1, \quad k \leftarrow left$

**while**  $i \leq m_1$  and  $j \leq m_2$

**do if**  $B[i] \leq C[j]$

**then**  $A[k] \leftarrow B[i]$

$i \leftarrow i + 1$

**else**  $A[k] \leftarrow C[j]$

$j \leftarrow j + 1$

$k \leftarrow k + 1$

**if**  $i \leq m_1$

**then**  $A[k, \dots, right] \leftarrow B[i, \dots, m_1]$

**else**  $A[k, \dots, right] \leftarrow C[j, \dots, m_2]$

## Analisi della complessità del MergeSort

Il costo dell'algoritmo **mergeSort** è espresso dalla seguente equazione di ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) + f(n) & \text{se } n > 1 \\ 1 & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

dove con  $f(n)$  abbiamo indicato il costo della procedura di fusione

Poichè  $f(n) = n = \Theta(n)$ , per il teorema del Master abbiamo che

$$T(n) = O(n \log_2 n)$$

# QuickSort

Altro algoritmo di ordinamento basato sul divide-et-impera; fasi per ordinare una sequenza  $A[p, \dots, r]$

- **divide**: partiziona  $A[p, \dots, r]$  in due sottoarray  $A[p, \dots, q - 1]$  e  $A[q + 1, \dots, r]$  (eventualmente vuoti) tali che ogni elemento di  $A[p, \dots, q - 1] \leq A[q] \leq$  di ogni elemento in  $A[q + 1, \dots, r]$ .  
Determinare l'indice  $q$  è parte integrante di questa procedura di partizionamento (**Partition**)
- **impera**: ordina  $A[p, \dots, q - 1]$  e  $A[q + 1, \dots, r]$  chiamando ricorsivamente la procedura **QuickSort**
- **combina**: i sottoarray sono ordinati sul posto non occorre alcun lavoro per combinarli;  $A[p, \dots, r]$  è già ordinato

# Algoritmo di ordinamento QuickSort

```
QuickSort( $A, p, r$ )  
  if  $p < r$   
    then  $q \leftarrow$  Partition( $A, p, r$ )  
        QuickSort( $A, p, q - 1$ )  
        QuickSort( $A, q + 1, r$ )
```

Per ordinare un array  $A$ , la chiamata iniziale è **QuickSort**( $A, 1, \text{length}[A]$ )

# La procedura **Partition**( $A, p, r$ )

Una generica iterazione della procedura **Partition**( $A, p, r$ ) gestisce un'array partizionato come segue:

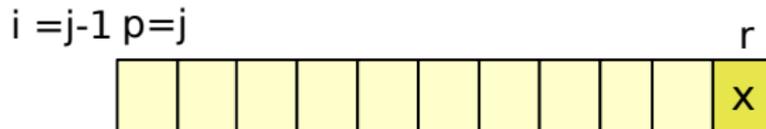


dove:

- $A[r] = x$  (**elemento pivot**)
- per ogni  $k$  tale che  $p \leq k \leq i$ ,  $A[k] \leq x$  (non maggiori del pivot)
- per ogni  $k$  tale che  $i + 1 \leq k \leq j - 1$ ,  $A[k] > x$  (maggiori del pivot)
- per ogni  $j \leq k \leq r - 1$ ,  $A[k]$  non è stato ancora esaminato

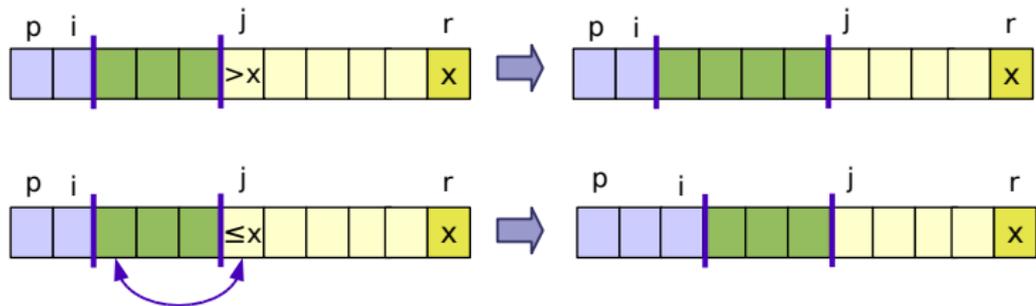
# La procedura **Partition**( $A, p, r$ )

**Stato iniziale:** nessun elemento della sequenza  $A[p, \dots, k - 1]$  è stato esaminato. Quindi  $j = p$  e  $i = j - 1 = p - 1$



# La procedura $\text{Partition}(A, p, r)$

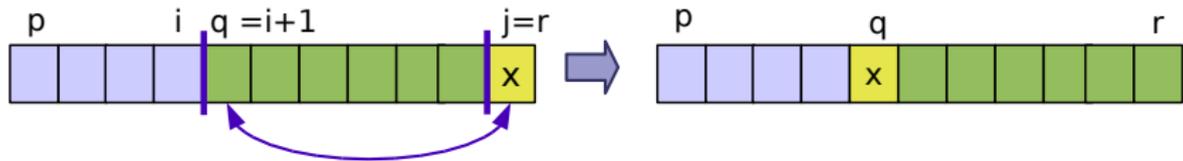
**Generica Iterazione:** confronta  $A[j]$  con il pivot  $A[r] = x$  e modifica lo stato corrente come segue



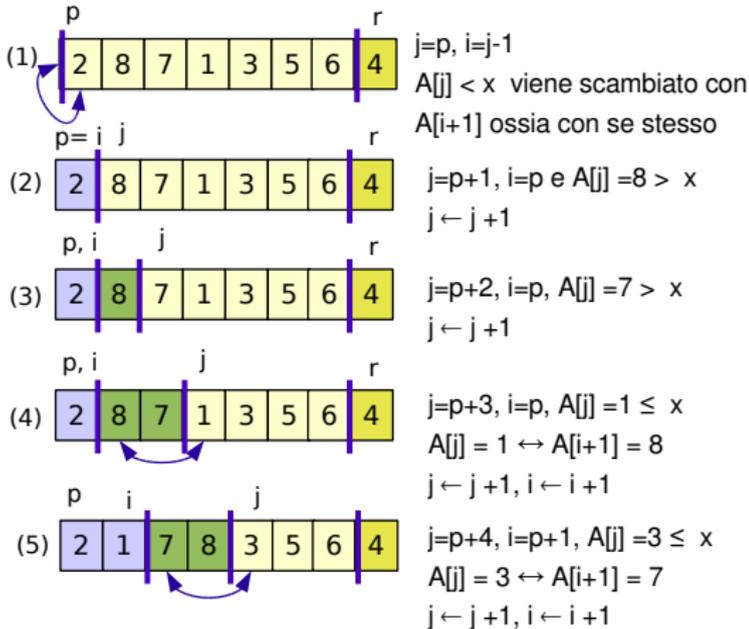
- $A[j] > x$ :  $A[j]$  è già nella porzione di vettore che gli compete
- $A[j] \leq x$ :  $A[j]$  deve essere spostato nella “zona blu”; viene scambiato con l’elemento in posizione  $i + 1$ , sicuramente maggiore di  $x$

# La procedura $\text{Partition}(A, p, r)$

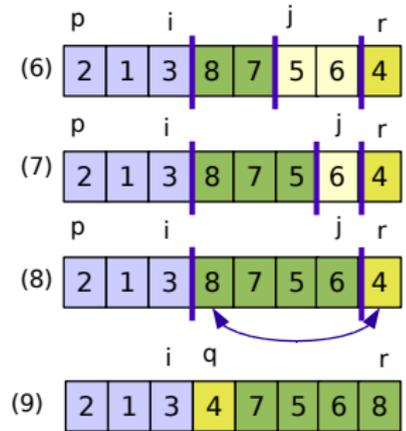
Stato finale:



# La procedura $\text{Partition}(A, i, \text{length}[A])$



$A[r] = x$  (pivot)  
 $p \leq k \leq i \Rightarrow A[k] \leq x$ ,  
 $i+1 \leq k \leq j-1 \Rightarrow A[k] > x$ ,  
 $j \leq k \leq r-1 \Rightarrow A[k]$  senza limitazioni



# La procedura **Partition**

**Partition**( $A, p, r$ )

$x \leftarrow A[r]$  ▷ elemento pivot

$i \leftarrow p - 1$

**for**  $j \leftarrow p$  **to**  $r - 1$

**do if**  $A[j] \leq x$

**then**  $i \leftarrow i + 1$

            scambia  $A[i] \leftrightarrow A[j]$

scambia  $A[i + 1] \leftarrow A[r]$

**return**  $i + 1$

Il tempo di esecuzione di **Partition** per un array di dimensione  $n$  è  $\Theta(n)$

## Prestazioni del QuickSort

Il tempo di esecuzione del **QuickSort** dipende da come lavora la **Partition** ed in particolare dal fatto che il partizionamento sia bilanciato o sbilanciato

Partizionamento sbilanciato: si verifica quando **Partition** produce due sottoproblemi con  $n - 1$  ed zero elementi, rispettivamente

**Caso peggiore:** questo partizionamento sbilanciato si verifica ad ogni chiamata ricorsiva; la ricorrenza che definisce il tempo di esecuzione del **QuickSort** è:

$$\begin{aligned}
 T(n) &= \overbrace{T(n-1) + T(0)}^{\text{costo delle chiamate di QuickSort}} + \overbrace{\Theta(n)}^{\text{costo di Partition}} \\
 &= T(n-1) + \Theta(n)
 \end{aligned}$$

# Prestazioni del QuickSort nel caso peggiore

Sommando i costi ad ogni livello di ricorsione, otteniamo la serie aritmetica il cui valore è  $\Theta(n^2)$

n  
|  
n - 1  
|  
n - 2  
...  
|  
1

Basta applicare il metodo della sostituzione per dimostrare che la soluzione della ricorrenza  $T(n) = T(n - 1) + \Theta(n)$  è  $T(n) = \Theta(n^2)$

Il tempo di esecuzione del **QuickSort** nel caso peggiore non è migliore di quello dell'**InsertionSort**

Inoltre, il tempo di esecuzione  $\Theta(n^2)$  si ha quando l'array è già ordinato, nella stessa situazione l'**InsertionSort** richiede un tempo  $O(n)$

## Prestazioni del **QuickSort** nel caso migliore

Nel caso di bilanciamento massimo, la procedura **Partition** genera due sottoproblemi, ciascuno di dimensione approssimativamente uguale a  $n/2$  (uno con dimensione  $\lfloor n/2 \rfloor$  e l'altro di dimensione  $\lceil n/2 \rceil - 1$ )

In questo caso **QuickSort** viene eseguito molto più velocemente; la ricorrenza per il tempo di esecuzione è

$$T(n) \leq 2T(n/2) + \Theta(n)$$

la cui soluzione, per il teorema del Master, è

$$T(n) = O(n \log_2 n)$$

## Prestazioni del **QuickSort** nel caso medio

Nel caso medio il **QuickSort** si comporta come nel caso migliore  $O(n \log_2 n)$

Per spiegare perchè, dobbiamo capire come il partizionamento influisce sul comportamento dell'algoritmo

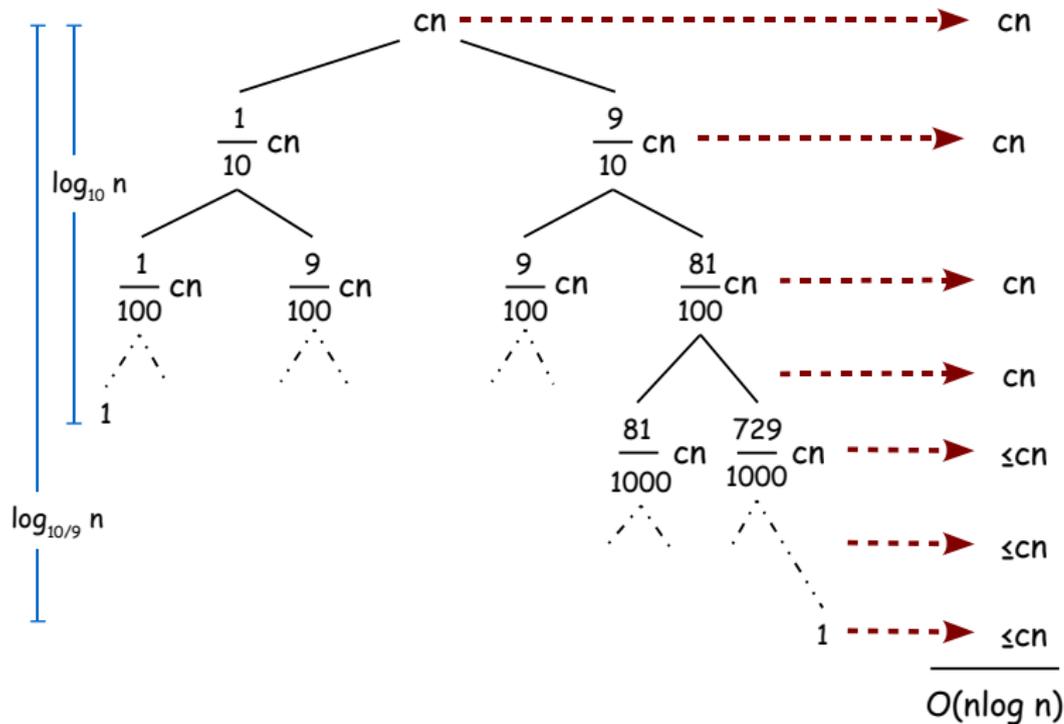
Supponiamo che **Partition** produca *sempre* una ripartizione, in apparenza molto sbilanciata, proporzionale  $9-a-1$

In questo caso otteniamo una ricorrenza

$$T(n) \leq T(9/10n) + T(1/10n) + cn$$

dove abbiamo incluso la costante  $c$  nascosta nel termine  $\Theta(n)$

# Un esempio



## Un esempio

Sommando i costi di ciascun livello abbiamo che  $T(n) \leq cn(h + 1)$  dove  $h = \log_{10/9} n$  è l'altezza dell'albero. Allora

$$T(n) = O(n \log_{10/9} n)$$

Inoltre,  $\log_{10/9} n = \log_{10/9} 2 \log_2 n$  (regola del cambiamento di base dei logaritmi) e quindi

$$T(n) = O(n \log_2 n)$$

Anche una ripartizione 99-a-1 determina un tempo di esecuzione pari a  $O(n \log_2 n)$

**La ragione:** una qualsiasi ripartizione con proporzionalità *costante* produce un albero di ricorsione di profondità  $\Theta(\log_2 n)$ ; il costo di ciascun livello è  $O(n)$ . Quindi, il tempo di esecuzione è  $O(n \log_2 n)$

## Alcune intuizioni sul caso medio

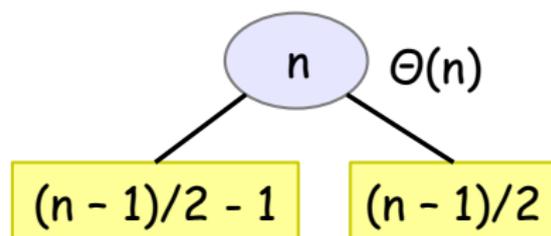
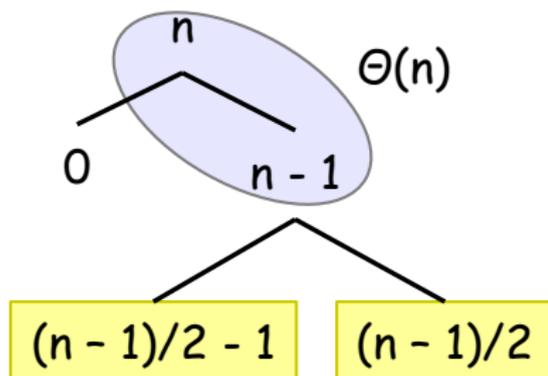
Se eseguiamo **QuickSort** su un input casuale, è poco probabile che il partizionamento avvenga sempre nello stesso modo ad ogni livello

È logico supporre che qualche ripartizione sarà ben bilanciata e qualche altra sarà molto sbilanciata

Nel caso medio **Partition** produce una combinazione di ripartizioni “buone” e di ripartizioni “cattive” distribuite a caso nell'albero di ricorsione

Assumiamo che le ripartizioni buone e cattive si alternino nei vari livelli dell'albero

# Alcune intuizioni sul caso medio



## Limite inferiore al PROBLEMA dell'ordinamento

Tutti gli algoritmi di ordinamento visti finora condividono una particolare proprietà: *effettuano l'ordinamento basandosi solo su confronti tra elementi in input*

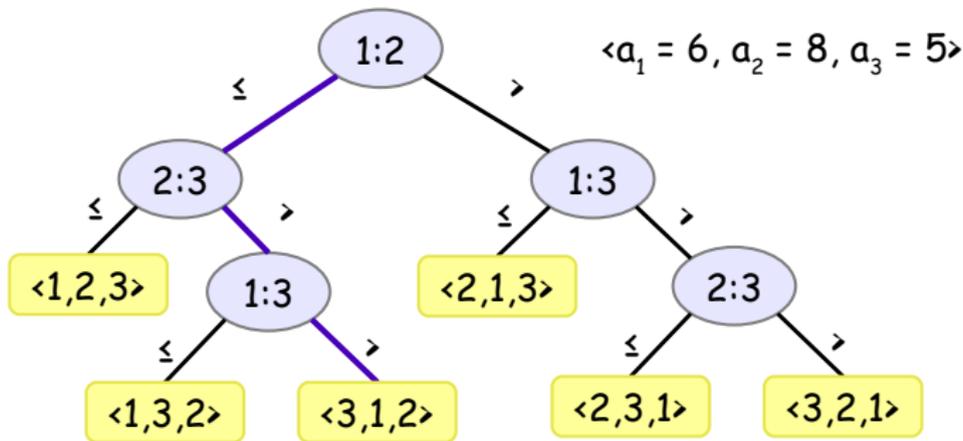
Gli algoritmi migliori ci consentono di ordinare una data sequenza in input in un tempo  $O(n \log_2 n)$  (heap-sort e merge-sort anche nel caso peggiore, il quick-sort solo nel caso medio)

In realtà, un qualsiasi ordinamento per confronti deve effettuare  $\Omega(n \log_2 n)$  confronti nel caso peggiore per ordinare  $n$  elementi

Heap-sort e merge-sort sono asintoticamente ottimali

# Un modello astratto per gli ordinamenti per confronti

Gli ordinamenti per confronti possono essere visti astrattamente in termini di **alberi di decisione**



albero di decisione per un insieme di tre elementi

## Alberi di decisione

Un albero di decisione è un albero binario usato per rappresentare la sequenza di confronti che vengono effettuati da un ordinamento per confronti

Ogni nodo interno:

- è rappresentato da  $i:j$  per qualche  $i$  e  $j$  nell'intervallo  $1 \leq i, j \leq n$ , dove  $n$  è il numero di elementi da ordinare  $a_i$  e  $a_j$
- corrisponde ad eseguire il confronto tra  $a_i$  ed  $a_j$ ; il sottoalbero sinistro (destro) detta i successivi confronti nel caso in cui  $a_i \leq a_j$  ( $a_i > a_j$ , rispettivamente)

Ogni foglia corrisponde ad una permutazione  $\langle \pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n) \rangle$

Quando si raggiunge una foglia, l'algoritmo di ordinamento ha stabilito l'ordinamento  $a_{\pi(1)} \leq a_{\pi(2)} \leq \dots \leq a_{\pi(n)}$

## Alberi di decisione

Qualsiasi algoritmo di ordinamento corretto deve essere in grado di produrre ogni permutazione del suo input

Quindi, ciascuna delle  $n!$  permutazioni di  $n$  elementi deve essere raggiungibile dalla radice lungo un dato percorso

Un qualsiasi percorso dalla radice fino ad una foglia corrisponde all'effettiva esecuzione di un algoritmo per confronti

## Alberi di decisione

**Teorema:** un qualsiasi algoritmo di ordinamento per confronti richiede  $\Omega(n \log_2 n)$  confronti nel caso peggiore

**Dimostrazione:** è sufficiente determinare l'altezza di un albero di decisione dove ogni permutazione appare come foglia raggiungibile

Consideriamo un albero di decisione di altezza  $h$  e con  $n!$  foglie

$n!$  è sicuramente minore o uguale del numero di foglie di un albero binario completo di altezza  $h$  (ossia  $2^h$ )  $n! \leq 2^h$ , quindi

$$h \geq \log_2 n! = \Omega(n \log_2 n)$$

## Parte I

# Ordinamento in tempo lineare

# Counting Sort

È un esempio di algoritmo in grado di ordinare un vettore di  $n$  elementi in tempo **lineare**

Come è possibile? Non opera **esclusivamente** sul confronto di elementi, ma fa delle ipotesi aggiuntive

Il CountingSort assume che **ciascuno degli  $n$  elementi da ordinare sia un intero compreso tra 0 e  $k$**

**Se  $k = O(n)$ , l'ordinamento viene effettuato in un tempo  $\Theta(n)$**

# Counting sort

**Idea di base:** determinare, per ogni elemento  $x$  in input, il numero di elementi minori di  $x$  (se ci sono 13 elementi minori di  $x$  allora  $x$  deve andare nella posizione 14)

Questo schema va leggermente modificato per gestire la presenza di più elementi con lo stesso valore

## Counting Sort

(a) A

1	2	3	4	5	6
2	5	3	0	2	1

C

0	1	2	3	4	5
1	1	2	1	0	1

$C[i]$  = numero di  
elementi uguali a  $i$

(b)

C

0	1	2	3	4	5
1	2	4	5	5	6

$C[i]$  = numero di  
elementi  $\leq a_i$

(c)

B

1	2	3	4	5	6

C

0	1	2	3	4	5
1	2	4	5	5	6

$A[6] = 1, C[1] = 2$

(d)

B

1	2	3	4	5	6
	1				

C

0	1	2	3	4	5
1	1	4	5	5	6

$A[5] = 2, C[2] = 4$

(e)

B

1	2	3	4	5	6
	1		2		

C

0	1	2	3	4	5
1	1	3	5	5	6

$A[4] = 0, C[0] = 1$

(f)

B

1	2	3	4	5	6
0	1		2		

C

0	1	2	3	4	5
0	1	3	5	5	6

## Counting Sort

(a) A

	1	2	3	4	5	6
A	2	5	3	0	2	1

C

	0	1	2	3	4	5
C	1	1	2	1	0	1

$C[i]$  = numero di  
elementi uguali a  $i$

(b)

C

	0	1	2	3	4	5
C	1	2	4	5	5	6

$C[i]$  = numero di  
elementi  $\leq a_i$

(f)

B

	1	2	3	4	5	6
B	0	1		2		

C

	0	1	2	3	4	5
C	0	1	3	5	5	6

$A[3]=3, C[3]=5$

(g)

B

	1	2	3	4	5	6
B	0	1		2	3	

C

	0	1	2	3	4	5
C	0	1	3	4	5	6

$A[2]=5, C[5]=6$

(h)

B

	1	2	3	4	5	6
B	0	1		2	3	5

C

	0	1	2	3	4	5
C	0	1	3	4	5	5

$A[1]=2, C[2]=3$

(i)

B

	1	2	3	4	5	6
B	0	1	2	2	3	5

C

	0	1	2	3	4	5
C	0	1	2	4	5	5

# Counting Sort

## CountingSort( $A, B, k$ )

1.     **for**  $i \leftarrow 0$  **to**  $k$  **do**  $C[i] \leftarrow 0$
2.     **for**  $j \leftarrow 1$  **to**  $\text{length}[A]$  **do**  $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] + 1$
3.     ▷  $C[i]$  contiene il numero di elementi uguali a  $i$
4.     **for**  $i \leftarrow 1$  **to**  $k$  **do**  $C[i] \leftarrow C[i] + C[i - 1]$
5.     ▷  $C[i]$  contiene il numero di elementi  $\leq i$
6.     **for**  $j \leftarrow \text{length}[A]$  **downto** 1
7.         **do**  $B[C[A[j]]] \leftarrow A[j]$  ▷  $A[j]$  è il valore,  $C[A[j]]$  la sua posizione
8.          $C[A[j]] \leftarrow C[A[j]] - 1$

I cicli for di riga 1 e 4 costano  $\Theta(k)$  e quelli di riga 2 e 6 costano  $\Theta(n)$ . Il costo complessivo è  $\Theta(n + k)$ . Se,  $k = O(n)$  allora  $\Theta(n + k) = \Theta(n)$